数理解析研究所講究録
113巻 1971年 39-58

線形擬周期的微分方程式のグリーン関数について

京大 数研　占部 実

§1. 序

与えられた線形擬周期的微分方程式を

$$(E_0) \qquad \frac{dx}{dt} = P(t)\,x + r(t)$$

とする。ただし

$$P(t) = A(t, t, \dots, t), \quad r(t) = b(t, t, \dots, t)$$

とし、$A(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $b(u_1, u_2, \dots, u_m)$ は $u_1, u_2, \dots, u_m$ に関し連続微分可能で、これらに関しそれぞれ周期 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ をもち、$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ は互に *incommensurable* であるとする。

(E_0) に対応してつぎの一階偏微分方程式を考える：

$$(E) \qquad Dx = A(u_1, u)\,x + b(u_1, u).$$

ただしここでは $u = (u_2, u_3, \dots, u_m)$ で、

$$D=\frac{\partial}{\partial u_1}+\sum_{i=2}^{m}\frac{\partial}{\partial u_i}$$

である．われわれは（E_0）の擬周期解に対応して（E）の周期解 $x(u_1, u)$，すなわち

$$\begin{cases} x(u_1+\omega_1,\ u)=x(u_1,\ u), \\ x(u_1,\cdots,u_i+\omega_i,\cdots)=x(u_1,\ u) \quad (i=2,3,\cdots,m) \end{cases}$$

となるものを求める。

（E）に対しては，任意の $\psi(u)\in C_u^1$ を与えると，$x(0,\ u)=\psi(u)$ となる解 $x(u_1,\ u)$ がつねに一つただ一つ存在する．したがって，（E）に対しては線形常微分方程式と同様なことが成立する．

すなわち，（E）に対応して線形同次方程式

(1・1) $\qquad Dy=A(u_1,u)y$

を考えると，これに対して基本行列$\Phi(u_1, u)$，すなわち，$D\Phi=A(u_1,u)\Phi$ をみたし，しかも $\det\Phi(u_1,u)$ が決して0にならないような行列$\Phi(u_1,u)$が存在する．いま，(1・1) の任意の基本行列を$\Phi(u_1,u)$としよう。すると，(1・1) の任意の解 $y(u_1,u)$ は

$$y(u_1, u) = \Phi(u_1, u)\, c(u-u_1)$$

で与えられ，また $D\Psi = A(u_1, u)\Psi$ をみたす任意の行列 $\Psi(u_1, u)$ は

$$\Psi(u_1, u) = \Phi(u_1, u)\, C(u-u_1)\ .$$

で与えられる．ただしこのとき，$c(u)$，$C(u)$ はそれぞれ u に関して1回連続微分可能である．

また，常微分方程式の場合と同じく，(1・1) の任意の基本行列を $\Phi(u_1, u)$ とすると，定数変化法によって，(E)の任意の解は

$$(1\cdot2)\quad x(u_1, u) = \Phi(u_1, u)\, c(u-u_1) + \Phi(u_1, u)\int_0^{u_1} \Phi^{-1} f(s, u-u_1+s)\, ds$$

で与えられることがわかる．

以下，われわれは (1・1) の基本行列で，$u_1 = 0$ のとき単位行列になるものをとり，それを $\Phi(u_1, u)$ で表わすことにする．このような $\Phi(u_1, u)$ に対しては，$A(u_1, u)$ が周期的であることから，つぎの等式が成り立つ：

$$(1.3)\begin{cases}\Phi(u_1+\omega_1,\ u)=\Phi(u_1,u)\,\Phi(\omega_1,\ u-u_1),\\ \Phi(u_1,\cdots,u_i+\omega_i,\cdots)=\Phi(u_1,u) \qquad (i=2,3,\ldots,m).\end{cases}$$

（E）の解 $x(u_1,u)$ を（1・2）の形で表わすとき，容易にわかるように，この解が周期的であるための必要十分条件は，$c(u)$ がつぎの方程式をみたすことである：

$$(\alpha) \qquad c(u+\omega_1)=\Phi(\omega_1,u+\omega_1)c(u) + \Phi(\omega_1,u+\omega_1)\int_0^{\omega_1}\Phi^{-1}b(s,u+s)\,ds,$$

$$(\beta) \qquad c(\cdots,u_i+\omega_i,\cdots)=c(u) \qquad (i=2,3,\cdots,m).$$

かくて，（E）の周期解を求める問題は，上の方程式をみたす $c(u)$ を求める問題になる。

ここでは，若干の条件のもとで，上の方程式（α），（β）をみたす $c(u)$ を求め，その条件のもとでは，（E）の周期解が

$$(1.4) \qquad x(u_1,u)=\int_{-\infty}^{\infty}G(u_1,u,s)\,b(s,u-u_1+s)\,ds$$

で与えられることを示す．(1.4)の積分の中に現われている $G(u_1, u, s)$ がグリーン関数で，これのあらわな形，およびそれのノルムの評価式も与える．

§2. 周期解をきめる $c(u)$ に対する必要条件

帰納法によって，方程式(α)からつぎの方程式が容易に導かれる：

$$(\gamma)\quad c(u+p\omega_1)=\Phi(p\omega_1, u+p\omega_1)c(u)+\Phi(p\omega_1, u+p\omega_1)\int_0^{p\omega_1}\Phi^{-1}b(s, u+s)\,ds$$

$$(p=0, 1, 2, \cdots).$$

ここで，つぎの補題を用いよう．

補題　$h\ (>0)$ は $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k\ (>0)$ と incommensurable であるとする．すると，

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_i < \cdots \longrightarrow \infty$$

で，$p_i \longrightarrow \infty$ のとき

$$(2.1)\quad p_i h \longrightarrow 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k}$$

となる，正の整数の列 $\{p_i\}$ が存在する。

(2.1) は，任意の正数 ε に対して正の整数 i_0 が存在し，$i \geq i_0$ であればつねに

$$|p_i h - m_{ij}\omega_j| < \varepsilon \quad (j=1,2,\cdots,k)$$

が整数 m_{ij} に対して成り立つ，ということを意味している。

上の補題によって，$m=1$ の場合には，

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_i < \cdots \to \infty$$

で，$p_i \to \infty$ のとき

(2.2) $$p_i\omega_1 \to 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_2, \cdots, \omega_m)$$

となる正の整数の列 $\{p_i\}$ が存在する。このような $\{p_i\}$ に対して，つぎのことを仮定する：

仮定 (A)： p_i が十分大きいときは，すべての u に対して

$$\|[E - \Phi(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1)]^{-1}\| \leq K < \infty$$

が成立する。

すると，われわれはつぎの定理を得る：

定理 1. 上の仮定が成り立つときは，方程式 (α), (β) をみたす $c(u)$ は，存在すればただ一つで，それに対しては

$$(2.3)\qquad c(u)=\lim_{i\to\infty} c_i(u)$$

が成立する．ただし

$$(2.4)\qquad c_i(u)=\left[E-\Phi(p_i\omega_1,\ u+p_i\omega_1)\right]^{-1}\Phi(p_i\omega_1,\ u+p_i\omega_1)\times \times\int_0^{p_i\omega_1}\Phi^{-1}b(s,\ u+s)\,ds$$

である．

逆に，上の仮定が成り立つときに，もし $\lim_{i\to\infty} c_i(u)$ が存在するならば，$c(u)=\lim_{i\to\infty} c_i(u)$ は方程式 (α), (β) をみたす。

〔証明〕 定理の前半は，方程式 (γ) から，すぐでてくる．

後半を証明するのには，まず $c_i(u+\omega_1)$ を計算する．

すると，つぎの結果を得る：

$$c_i(u+\omega_1)=\Phi_1(u)[E+T_i(u)]\cdot\left[c_i(u)+\int_0^{\omega_1}\Phi^{-1}b(s,u+s)ds\right]$$

$$+\Phi_1(u)[E+T_i(u)]\cdot[E-\Phi(p_i\cdot\omega_1,u+p_i\cdot\omega_1)]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^{\omega_1}[\Phi^{-1}b(s,u+p_i\cdot\omega_1+s)-\Phi^{-1}b(s,u+s)]ds.$$

ただし

$$T_i(u)=[\Phi_1(u)-\Phi_{p_i+1}(u)\Phi(p_i\omega_1,u+p_i\omega_1)]^{-1}\times$$

$$\times[\Phi_{p_i+1}(u)-\Phi_1(u)]$$

で，$\Phi_r(u)=\Phi(\omega_1,\ u+r\omega_1)$ である．$p_i\to\infty$ のとき，

$$\Phi_{p_i+1}(u)=\Phi(\omega_1,u+\omega_1+p_i\omega_1)\to\Phi(\omega_1,u+\omega_1)=\Phi_1(u)$$

であるから，$\lim_{i\to\infty}T_i(u)=0$ となり，したがって

$c(u)=\lim_{i\to\infty}c_i(u)$ に対しては，方程式（α）を得る．

$c_i(u)$ は u に関しては周期的であるから，$c(u)$ も u に関して周期的となり，方程式（β）は明らかに成り立つ．これで定理は証明されたことになる．

上の定理により，われわれの問題は，どのような場合に，$c_i(u)$ が収束するか，を調べることになる。

§3. $c_i(u)$ の収束

方程式'(E)において，周期的な正則行列 $S(u_1, u) \in C^1_{u_1, u}$ を用いて，変数変換

$$(3.1) \qquad x = S(u_1, u)\mathring{x}$$

を行うと，

$$(3.2) \qquad D\mathring{x} = \mathring{A}(u_1, u)\mathring{x} + \mathring{b}(u_1, u)$$

を得る。ただし

$$\begin{cases} \mathring{A}(u_1, u) = S^{-1}(u_1, u)A(u_1, u)S(u_1, u) - S^{-1}(u_1, u)DS(u_1, u), \\ \mathring{b}(u_1, u) = S^{-1}(u_1, u)b(u_1, u) \end{cases}$$

である。このとき，

$$(3.3) \qquad D\mathring{y} = \mathring{A}(u_1, u)\mathring{y}$$

の基本行列で，$u_1 = 0$ のとき単位行列となるものを $\mathring{\Phi}(u_1, u)$ とすると，

$$(3\cdot4)\quad \mathring{\Phi}(u_1,u)=S^{-1}(u_1,u)\,\Phi(u_1,u)\,S(0,u-u_1)$$

を得る。

以下，われわれは，つぎの条件が満されている場合について考える；

<u>条件（C）</u>： 適当に $S(u_1,u)$ を選ぶとき，$\mathring{\Phi}(\omega_1,u)$ は，

$$\mathring{\Phi}(\omega_1,u)=U(u)\oplus V(u)$$

となる．ただし $U(u)$，$V(u)$ は，すべての u に対して，それぞれつぎの不等式をみたす行列である：

$$\|U(u)\|\leq\theta<1,\quad \|V^{-1}(u)\|\leq\theta_1<1.$$

すると，つぎの定理が得られる：

<u>定理 2</u>． 条件（C）が満されているときは，§2の仮定（A）は成立し，（2・4）で与えられる $c_i(u)$ は収束して

$$(3\cdot5)\qquad \lim_{i\to\infty} c_i(u) = S(0,u)\,\mathring{c}(u)$$

となる．ただし

$$(3\cdot6)\qquad \mathring{c}(u) = \int_{-\infty}^{0} P_0\,\mathring{\Phi}^{-1}\mathring{b}(s, u+s)\,ds - \int_{0}^{\infty} P_1\,\mathring{\Phi}^{-1}\mathring{b}(s, u+s)\,ds$$

で，P_0, P_1 は $\mathring{\Phi}(\omega_1, u)$ の分解に対応して単位行列を分解したとき得られる，それぞれ，つぎの形の行列である：

$$(3\cdot7)\qquad P_0 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

［証明］　(1・3) によって

$$\mathring{\Phi}(p\omega_1, u+p\omega_1) = \mathring{\Phi}(\omega_1, u+p\omega_1)\,\mathring{\Phi}(\omega_1, u+(p-1)\omega_1)\cdots\mathring{\Phi}(\omega_1, u+\omega_1)$$
$$(p=1, 2, 3, \cdots)$$

となるので，条件 (C) から

$$\mathring{\Phi}(p\omega_1, u+p\omega_1) = U(u+p\omega_1)\,U(u+(p-1)\omega_1)\cdots U(u+\omega_1)$$
$$\oplus\, V(u+p\omega_1)\cdots V(u+\omega_1)$$
$$(p=1, 2, 3, \cdots)$$

を得る．これより，容易に

$$\lim_{p\to\infty}\ [E-\overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u+p\omega_1)]^{-1}=P_0$$

を得る．（3・4）を用いて計算すると，上の式から，

$$\lim_{p_i\to\infty}[E-\Phi(p_i\omega_1, u+p_i\omega_1)]^{-1}=S(0,u)P_0S^{-1}(0,u)$$

を得る．これによって，§2の仮定（A）はいまの場合成り立つことがわかる．

なお，上の計算から，つぎのこともわかる：

$$(3\cdot8)\qquad c_i(u)=S(0,u)[E-W_i(u)]^{-1}\overset{\circ}{c}_i(u).$$

ただし

$$(3\cdot9)\qquad W_i(u)=[E-\overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u+p_i\omega_1)]^{-1}S^{-1}(0,u+p_i\omega_1)\times$$
$$\times[S(0,u+p_i\omega_1)-S(0,u)],$$

$$(3\cdot10)\qquad \overset{\circ}{c}_i(u)=[E-\overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u+p_i\omega_1)]^{-1}\overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u+p_i\omega_1)\times$$
$$\times\int_0^{p_i\omega_1}\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}\overset{\circ}{b}(s,u+s)\,ds$$

である．

さて，任意の正の整数 p に対して，

$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}(p\omega_1, u+p\omega_1)=U^{-1}(u+\omega_1)\cdots U^{-1}(u+p\omega_1)$$

$$\oplus\ V^{-1}(u+\omega_1)\cdots V^{-1}(u+p\omega_1),$$

$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}(-p\omega_1, u-p\omega_1)=\overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u)$$

$$=U(u)U(u-\omega_1)\cdots U(u-(p-1)\omega_1)$$

$$\oplus\ V(u)V(u-\omega_1)\cdots V(u-(p-1)\omega_1)$$

が成り立つ．すると，$P_0\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}(t, u+t)$，$P_1\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}(t, u+t)$ の行ベクトルをそれぞれ $z_i^*(t, u)$，$z_k^*(t, u)$ で表わし，ノルムとして成分の maximum をとると，条件(c)により，

$$(3.11)\quad \begin{cases} \|z_i^*(-p\omega_1, u)\| \leq \theta^p, \\ \|z_k^*(p\omega_1, u)\| \leq \theta_1^p \end{cases}$$

$$(p=1, 2, \cdots)$$

を得る。

さて，$\overset{\circ}{\Phi}(t, u+t)$ は微分方程式

$$\frac{d}{dt}\overset{\circ}{\Phi}(t, u+t)=\overset{\circ}{A}(t, u+t)\overset{\circ}{\Phi}(t, u+t)$$

をみたしているから，

$$\frac{d}{dt}\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}(t, u+t)=-\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}(t, u+t)\overset{\circ}{A}(t, u+t)$$

が成り立つ．したがって

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt} z_i^*(t,u) = -z_i^*(t,u)\mathring{A}(t, u+t), \\ &\frac{d}{dt} z_k^*(t,u) = -z_k^*(t,u)\mathring{A}(t, u+t) \end{aligned}\right.$$

が成り立つ．すると，$\mathring{A}(t, u+t)$ の有界性から，(3・11) より，

(3・12)　$t \leq 0$ に対して　$\|z_i^*(t,u)\| \leq C e^{\sigma t}$,

(3・13)　$t \geq 0$ に対して　$\|z_k^*(t,u)\| \leq C_1 e^{-\sigma_1 t}$

を得る．ただし C, C_1 は u に無関係な定数で，

(3・14)　$\sigma = -\frac{1}{\omega_1} \log \theta > 0$,　$\sigma_1 = -\frac{1}{\omega_1} \log \theta_1 > 0$

である．

(3・10) により，

(3・15)　$c_i^{(1)}(u) = P_0 \mathring{c}_i(u)$,　$c_i^{(2)}(u) = P_1 \mathring{c}_i(u)$

とおけば，

(3・16)　$\mathring{c}_i(u) = c_i^{(1)}(u) + c_i^{(2)}(u)$

で，

$$c_i^{(1)}(u) = P_0\,[E - \overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1)]^{-1} P_0\,\overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1) \times$$
$$\times \int_0^{p_i\omega_1} \overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{\circ}{b}(s, u+s)\,ds,$$

$$c_i^{(2)}(u) = P_1\,[E - \overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1)]^{-1} \overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1) \times$$
$$\times \int_0^{p_i\omega_1} P_1\,\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{\circ}{b}(s, u+s)\,ds$$

を得る.

さて, (3.12) を用いると, $p_i \to \infty$ とすれば,

$$P_0\,\overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1) \int_0^{p_i\omega_1} \overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{\circ}{b}(s, u+s)\,ds$$
$$= \int_{-p_i\omega_1}^{0} P_0\,\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{\circ}{b}(s, u + p_i\omega_1 + s)\,ds$$
$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{0} P_0\,\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{\circ}{b}(s, u+s)\,ds$$

となることを証明することができる. これから,

$$\text{(3.17)} \quad \lim_{i\to\infty} c_i^{(1)}(u) = \int_{-\infty}^{0} P_0\,\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{\circ}{b}(s, u+s)\,ds$$

となることがわかる. $c_i^{(2)}(u)$ に対しては, (3.13) を用いると,

$$\text{(3.18)} \quad \lim_{i\to\infty} c_i^{(2)}(u) = -\int_0^{\infty} P_1\,\overset{\circ}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{\circ}{b}(s, u+s)\,ds$$

となることが証明される．かくて，(3・16)により，

$$\lim_{i\to\infty} \mathring{c}_i(u) = \mathring{c}(u)$$

を得る．(3・9)により，$\lim_{i\to\infty} W_i(u) = 0$ であるから，(3・8)より(3・5)を得る．これで定理は証明された．

(3・5)により，

$$(3\cdot 19) \qquad c(u) = S(0,u)\,\mathring{c}(u)$$

とおけば，

$$(3\cdot 20) \qquad c(u) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{P}_0(u)\,\Phi^{-1} b(s, u+s)\,ds - \int_{0}^{\infty} \tilde{P}_1(u)\,\Phi^{-1} b(s, u+s)\,ds$$

となる．ただし

$$(3\cdot 21) \qquad \begin{cases} \tilde{P}_0(u) = S(0,u) P_0 S^{-1}(0,u) \\ \tilde{P}_1(u) = S(0,u) P_1 S^{-1}(0,u) \end{cases}$$

である．このとき，

$$\tilde{P}_0^{\,2}(u) = \tilde{P}_0(u), \quad \tilde{P}_1^{\,2}(u) = \tilde{P}_1(u),$$

$$\tilde{P}_0(u)+\tilde{P}_1(u)=E$$

であることは明らかである。また，明らかに $\tilde{P}_0(u)$, $\tilde{P}_1(u)$ は u に関して一回連続微分可能であり，しかも u に関して周期的である。

(3・20) で与えられる $C(u)$ が条件 (α), (β) をみたしていることは，直接に検証もできる。

§4. グリーン関数

条件 (C) が満たされているときは，定理2により，(E) の任意の周期解 $x(u_1, u)$ は，(1・2) を用いて，つぎのように書くことができる：

$$\begin{aligned}
x(u_1,u) &= \Phi(u_1,u)\int_{-\infty}^{0}\tilde{P}_0(u-u_1)\Phi^{-1}b(s,u-u_1+s)\,ds \\
&\quad -\Phi(u_1,u)\int_{0}^{\infty}\tilde{P}_1(u-u_1)\Phi^{-1}b(s,u-u_1+s)\,ds \\
&\quad +\Phi(u_1,u)\int_{0}^{u_1}[\tilde{P}_0(u-u_1)+\tilde{P}_1(u-u_1)]\Phi^{-1}b(s,u-u_1+s)\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{u_1}\Phi(u_1,u)\tilde{P}_0(u-u_1)\Phi^{-1}(s,u-u_1+s)b(s,u-u_1+s)\,ds \\
&\quad -\int_{u_1}^{\infty}\Phi(u_1,u)\tilde{P}_1(u-u_1)\Phi^{-1}(s,u-u_1+s)b(s,u-u_1+s)\,ds,
\end{aligned}$$

すなわち,

$$(4\cdot 1)\qquad x(u_1,u)=\int_{-\infty}^{\infty}G(u_1,u,s)\,b(s,u-u_1+s)\,ds.$$

ただし

$$(4\cdot 2)\quad G(u_1,u,s)=\begin{cases}\Phi(u_1,u)\tilde{P}_0(u-u_1)\Phi^{-1}(s,u-u_1+s) & (s\leq u_1),\\ -\Phi(u_1,u)\tilde{P}_1(u-u_1)\Phi^{-1}(s,u-u_1+s) & (s>u_1)\end{cases}$$

である. (4・2) で与えられる $G(u_1,u,s)$ が求めるグリーン関数である.

グリーン関数 $G(u_1,u,s)$ に対してはつぎの定理が成り立つ:

定理 3.

$$(4\cdot 3)\quad \|G(u_1,u,s)\|\leq\begin{cases}Me^{\sigma_0|u_1|+\sigma s} & (s\leq 0,\ s\leq u_1)\\ Me^{\sigma_0|u_1|-\sigma_1 s} & (s>0,\ s>u_1).\end{cases}$$

ただし, M, σ_0 は u_1, u, s に無関係な定数で, σ, σ_1 は (3・14) で与えられる定数である.

[証明] (3・4), (3・21), (4・2) により

$$G(u_1, u, s) = S(u_1, u)\overset{\circ}{G}(u_1, u, s)S^{-1}(s, u-u_1+s)$$

である．ただし

$$\overset{\circ}{G}(u_1, u, s) = \begin{cases} \overset{\circ}{\Phi}(u_1, u)P_0\overset{\circ}{\Phi}^{-1}(s, u-u_1+s) & (s \leq u_1), \\ -\overset{\circ}{\Phi}(u_1, u)P_1\overset{\circ}{\Phi}^{-1}(s, u-u_1+s) & (s > u_1) \end{cases}$$

である．

さて，任意の正の整数 p に対して，

$$\overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u+p\omega_1) = \overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u+p\omega_1)\cdots\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u+\omega_1),$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Phi}(-p\omega_1, u-p\omega_1) &= \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(p\omega_1, u) \\ &= [\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u)\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u-\omega_1)\cdots\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u-(p-1)\omega_1)]^{-1} \\ &= \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(\omega_1, u-(p-1)\omega_1)\cdots\overset{\circ}{\Phi}^{-1}(\omega_1, u) \end{aligned}$$

で，しかも $\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u)$ は u に関して周期的であるから

$$\|\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u)\|,\ \|\overset{\circ}{\Phi}^{-1}(\omega_1, u)\| \leq \kappa$$

が成り立つ正数 $\kappa > 1$ が存在する．したがって

$$\|\overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u+p\omega_1)\| \leq \kappa^{p}$$
$$(p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

が成り立つ．しかも

$$\frac{d}{dt}\mathring{\Phi}(t, u+t) = \mathring{A}(t, u+t)\mathring{\Phi}(t, u+t)$$

が成り立つから，

$$\|\mathring{\Phi}(t, u+t)\| \leq C_0 e^{\sigma_0 |t|}$$

が成り立つような正数 C_0 が存在する．ただしここで

$$\sigma_0 = \frac{1}{\omega_1}\log \kappa$$

である．すると (3.12), (3.13) により，

$$\|\mathring{G}(u_1, u, s)\| \leq \begin{cases} M_0 e^{\sigma_0 |u_1| + \sigma s} & (s \leq 0,\ s \leq u_1) \\ M_0 e^{\sigma_0 |u_1| - \sigma s} & (s \geq 0,\ s > u_1) \end{cases}$$

を得る．これより（4.3）はすぐでてくる．これで定理は証明された．

§5. あと書き

擬周期系のグリーン関数に関しては目下研究中で，ここで述べたことはその研究の中間報告である．結果は，まだ満足のできる段階にまで至っていない．最大の問題は，条件（C）がどの程度の必然性をもっているか，である．目下その点について研究を進めている，ことを記しておく。